Examen parcial – FMIBII – Curso 2018-2019

Ejercicio 1 (4.0 puntos; RA1, RA2, RA3, RA4.1, RA5.1) Tiempo estimado: 45 minutos.

La forma de determinada señal biomédica viene definida por la siguiente función:

$$f(x) = \sqrt{|x-4|}$$

a) [0.5 puntos] Estudie el dominio y la continuidad de $f(x)$.

b) [0.5 puntos] Determine, si los hay, los puntos de corte con los ejes de coordenadas y las asíntotas.

c) [0.8 puntos] Estudie la derivabilidad *de* $f(x)$ y la continuidad de $f'(x)$.

d) [0.8 puntos] Determine los extremos y la concavidad de $f(x)$.

e) [0.6 puntos] A partir de la información obtenida en los apartados anteriores, esboce la gráfica de $f(x)$.

f) [0.8 puntos] Calcule el área bajo la curva de $f(x)$ entre $x = 0 \; y \; x = 8$.

Ejercicio 2 (3.5 puntos; RA1, RA2, RA3, RA4.1, RA5.1) Tiempo estimado: 40 minutos.

Dada la función $g(x) = x^2 - x^3$:

a) [0.7 puntos] Demuestre que $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ utilizando la definición formal de límite.

b) [1.0 puntos] Calcule $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx$ utilizando el límite de la suma de Riemann correspondiente. Compruebe que el resultado obtenido anteriormente es correcto resolviendo directamente la integral definida.

NOTA:

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

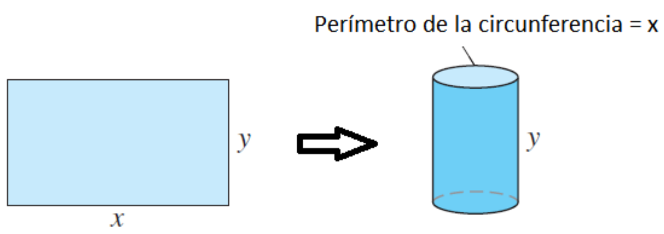
$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

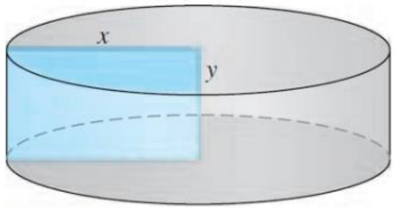
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

A continuación, resuelva los siguientes problemas:

c) [1.0 punto] Una hoja rectangular con perímetro de 36 cm, largo x cm y ancho y cm se enrolla como si fuese un cilindro, tal y como se puede observar en la figura que se adjunta a continuación. ¿Qué valores de x e y harían que el volumen del cilindro fuese máximo?



Imagine ahora que la misma hoja se hace girar alrededor de uno de los lados de longitud y para generar el cilindro que se puede observar en la siguiente figura. ¿En este caso, qué valores de x e y harían que el volumen de este nuevo cilindro fuese máximo?



NOTA: Volumen de un cilindro de radio r y altura h: $V_{cilindro} = \pi r^2 h$

d) [0.8 puntos] Demuestre la siguiente igualdad utilizando la definición de derivada y la regla de la cadena.

$$\frac{d}{dx}(|u|) = \frac{u}{|u|} \cdot u', \qquad u \neq 0$$

NOTA: u es una función que depende de x.

Ejercicio 3 (2.5 puntos; RA1, RA2, RA3, RA4.1, RA5.1) Tiempo estimado: 35 minutos.

a) [0.9 puntos] Se define la función $F(x)$ como:

$$F(x) = x \cdot \int_2^{x^2} sen(t^3)\, dt$$

Determine $F'(x)$ utilizando para ello el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

NOTA: En el resultado final, deje indicado el término $\int_2^{x^2} sen(t^3)\, dt$

b) [0.9] Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $x^3 + y^3 - 9xy = 0$ que pasa por el punto (2,4).

c) [0.7] Evalúe la siguiente integral realizando el cambio de variable que considere adecuado:

$$\int x \cdot \sqrt{2x+1}\, dx$$